Olympiadepuzzel

Euclides 93 nummer 6

Getallenrij

Opgave

Voor een getallenrij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ geldt de formule $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$ voor alle positieve gehele n. Bekend is dat $a_{98} = 9410$, $a_{100} = 9802$ en $a_{102} = 10202$. Bereken alle mogelijke waarden van a_{1001}.

Uitwerking

Noem $a_{99} = a$ en $a_{101} = b$. Dan geldt volgens de formule $b = 3 \cdot 9802 - 3a + 9410$ en $10202 = 3b - 3 \cdot 9802 + a$. We kunnen dit herschrijven tot $3a + b = 38816$ en $a + 3b = 39608$. Drie keer de tweede vergelijking min de eerste vergelijking geeft $8b = 80008$, dus $b = 10001$.

We zien dat $a_{100} = 9802 = 99^2 + 1$, $a_{101} = b = 10001 = 100^2 + 1$ en $a_{102} = 10202 = 101^2 + 1$. We vermoeden dus dat voor alle n geldt dat $a_n = (n-1)^2 + 1$. Dit gaan we bewijzen. Stel dat $a_n = (n-1)^2 + 1$, $a_{n+1} = n^2 + 1$ en $a_{n+2} = (n+1)^2 + 1$. Dan is

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n \\ &= 3(n+1)^2 + 3 - 3n^2 - 3 + (n-1)^2 + 1 \\ &= n^2 + 4n + 5 \\ &= (n+2)^2 + 1. \end{aligned}$$

Dus als we voor drie opeenvolgende termen in de rij weten dat het vermoeden klopt, dan klopt het ook voor de volgende. (En net zo goed kunnen we bewijzen dat het dan ook voor de vorige geldt.)

Omdat we drie opeenvolgende termen in de rij kennen (a_{100}, a_{101} en a_{102}) en die allemaal aan het vermoeden voldoen, voldoet dus de hele rij daaraan. We concluderen dat $a_{1001} = 1000^2 + 1 = 1000001$.

Inzenders met een (bijna) juiste uitwerking

In sommige inzendingen ontbraken een paar details om het helemaal sluitend te maken, maar iedereen heeft in elk geval de juiste formule voor de rij weten te achterhalen, dus we rekenen alle inzendingen (bijna) goed. De inzenders waren: Harm Bakker, Erwin Bruinsma, Marcel Daems, Bart Dopheide, Hans Huisman, Floor van Lamoen, Hans Linders, Jan Meerhof, Chantal Neijenhuis, Ruud Stolwijk, P.G. van de Veen, Kees Vugs, Klaas-Jan Wieringa, Monica Woldinga.

Winnaar van de kadobon

Harm Bakker.